А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

# АЛГЕБРА

## Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2009

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
(Лист від 19.06.2009 р. № 1/11-4350)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
*Н. С. Прокопенко*

ISBN 978-966-474-059-0

# Від авторів

## ЛЮБІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Ми сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Бажаємо успіху!

## ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

**Червоним** кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

## Умовні позначення

$n^{\circ}$ завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

$n^{*}$ задачі для математичних гуртків і факультативів;

 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

$n$ ($m$) задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер $m$ вказує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);

▲ закінчення доведення теореми;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

# § 1. ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

## 1. Задачі на повторення курсу алгебри 8 класу

**1.1.** Які множини є рівними:

1) $A = \{x \mid x = 5n - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$; 3) $C = \{x \mid x = 5n + 4,\ n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $B = \{x \mid x = 10n + 9,\ n \in \mathbb{Z}\}$; 4) $D = \{x \mid x = 10n - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

**1.2.** Яка множина є перетином множин $A$ і $B$, якщо $A$ — множина прямокутників, $B$ — множина описаних чотирикутників?

**1.3.** Яка множина є перетином множин $A$ і $B$, якщо $A$ — множина ромбів, $B$ — множина вписаних чотирикутників?

**1.4.** Яка множина є об'єднанням множин $A$ і $B$, якщо $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

**1.5.** Яка множина є об'єднанням множин $A$ і $B$, якщо $A = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 6n - 3,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

**1.6.** Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * \varnothing = A$; 2) $A * \varnothing = \varnothing$.

**1.7.** Відомо, що $A \subset B$. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * B = B$; 2) $A * B = A$.

**1.8.** Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

**1.9.** Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:
1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**1.10.** У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 — гурток з фізики, а 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки фізиків захоплюються математикою?

**1.11.** Квадрату, площа якого дорівнює 6 см$^2$, належать три многокутники, площа кожного з яких дорівнює 3 см$^2$. Доведіть, що серед цих многокутників знайдуться два, площа спільної частини яких не менша ніж 1 см$^2$.

**1.12.** Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких цифри записано у порядку зростання, чи тих, у яких цифри записано у порядку спадання?

**1.13.** Знайдіть область визначення виразу:
1) $\dfrac{1}{2x^2 - x - 1}$; 2) $\dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x-1}}$; 3) $\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x+1}}$.

**1.14.** Побудуйте графік функції:
1) $y = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 1}$; 2) $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$; 3) $y = \dfrac{x - 1}{|x - 1| + 1 - x}$.

**1.15.** Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 4x + 3}$; 3) $\dfrac{a^4 + 9a^2 + 25}{a^2 + a + 5}$;
2) $\dfrac{9x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$; 4) $\dfrac{x^{71} + x^{70} + \ldots + x + 1}{x^{23} + x^{22} + \ldots + x + 1}$.

**1.16.** Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких є цілим числом значення виразу:
1) $\dfrac{2n + 11}{n + 3}$; 2) $\dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2}$.

**1.17.** Спростіть вираз:
$$\frac{1}{x(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+12)} + \frac{1}{(x+12)(x+16)}.$$

**1.18.** Спростіть вираз:
1) $\left(\dfrac{2x}{1 - 3y} + \dfrac{2x}{3y + 1}\right) : \dfrac{4x^2 + 14x}{9y^2 + 1 - 6y}$;
2) $\dfrac{x^3 - y^3}{2y}\left(\dfrac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \dfrac{2xy + 4y}{(x - y)(x^2 - 4)}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right):\frac{(a+b)^2}{ab}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

**1.19.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)\cdot\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{6a}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{a+2}{12a}\right)^{-1}\cdot(3a+2)^{-1}$;

3) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{x}{x-y}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{-1}+\left(\frac{x+7}{x^2+81-18x}+\frac{x+5}{x^2-81}\right)\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$.

**1.20.** Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}\frac{3x-1}{4}+\frac{x+1}{3}\geqslant\frac{4x+1}{4},\\ \frac{5x-2}{2}+\frac{x-8}{3}\leqslant x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}-1<1+4x,\\ 3x-6>-2(1-x),\\ 3(2x-1)>1-2x.\end{cases}$

**1.21.** Для кожного значення параметра $a$ розв'яжіть нерівність:

1) $ax+2>x$;
2) $ax+a^2\geqslant 2x+4$.

**1.22.** Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)^2(x-2)\geqslant 0$;
2) $(x+1)(x-2)^2>0$;
3) $|x^2-4|(x-1)\geqslant 0$;
4) $|x^2-9|(x+2)<0$.

**1.23.** Для кожного значення параметра $a$ розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2-4x+3|(x-a)\geqslant 0$;
2) $|x^2+3x+2|(x-a)<0$.

**1.24.** Розв'яжіть рівняння:

1) $||x-1|-1|=2$;
2) $|2x-1|=x+2$;
3) $|3x-2|=|2x-3|$;
4) $|x-4|+|x+1|=5$;
5) $|x+2|-|x-1|=3$;
6) $\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=1$.

**1.25.** Розв'яжіть нерівність:

1) $|3x-4|<2$;
2) $|x-2|<-2x$;
3) $|4x+5|>x+8$;
4) $|x|-|x-3|\leqslant 2x$.

**1.26.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 2, \\ \dfrac{1}{2}x + 3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

**1.27.** Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y - x^2}{x^2 - x} = 0$;
2) $\dfrac{y + x^2}{y + x} = 0$;
3) $\dfrac{y^2 - x^4}{x^2 - 1} = 0$.

**1.28.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$;
2) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$;
3) $(x^2 + 3x - 4)\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0$.

**1.29.** Знайдіть усі пари чисел $(x;\ y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{y - 2} = 0$;
2) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{y^2 - y - 2} = 0$;
3) $\sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = 0$.

**1.30.** Для кожного значення параметра $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)\sqrt{x - 3} = 0$;
2) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - a} = 0$;
3) $(x^2 + 4x - 5)\left(\sqrt{x} - a\right) = 0$.

**1.31.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$;
2) $\sqrt{43 + 6\sqrt{50}} - \sqrt{43 - 6\sqrt{50}}$;
3) $\sqrt{6 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$;
4) $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

**1.32.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a - 2 + 2\sqrt{a - 3}}$;
2) $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - 4}}$, якщо $x > 2$;
3) $\sqrt{2a - 4 + 2\sqrt{a^2 - 4a + 3}} - \sqrt{a - 1}$;
4) $\dfrac{\sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x + 2}} - 1}{\sqrt{x + 2}}$.

**1.33.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)(a - b)} + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{ab}}{a - b}$;

2) $a : \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right) + b : \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)$;

3) $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$;

4) $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

**1.34.** Відомо, що $x_1$ і $x_2$ — корені рівняння $2x^2-x-5=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 3) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$.

**1.35.** Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2+4x-7=0$.

**1.36.** При яких значеннях параметра $a$ сума коренів рівняння $x^2-(a^2+2a)x-a=0$ дорівнює 3?

**1.37.** При яких значеннях параметра $a$ добуток коренів рівняння $x^2-2ax+a^2-a=0$ дорівнює 2?

**1.38.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

2) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

3) $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$.

**1.39.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)(x-7)(x-4)(x+2)=40$;

2) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$;

3) $(x+6)(x+3)(x-1)(x-2)=12x^2$;

4) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$;

5) $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$;

6) $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$;

7) $(x+5)^4+(x+3)^4=2$;

8) $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7$.

**1.40.** Доведіть, що при будь-якому цілому значенні $n$ значення виразу $n(n+1)(2n+1)$ кратне 6.

**1.41.** Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні $n$ значення виразу $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ є натуральним числом.

**1.42.** Чи існують такі натуральні числа $n$ і $k$, що значення виразу $5^n + 1$ кратне значенню виразу $5^k - 1$?

**1.43.** Натуральне число $n > 1$ не ділиться націло ні на 2, ні на 3. Доведіть, що число $n^2 - 1$ кратне 24.

**1.44.** Доведіть, що не існує такого натурального числа $p$, для якого числа $p + 5$ і $p + 10$ є простими.

**1.45.** Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m; n)$ таких, що $m! + 12 = n^2$.

**1.46.** Знайдіть усі двоцифрові натуральні числа, будь-який натуральний степінь яких закінчується двома цифрами, що утворюють це двоцифрове число.

**1.47.** Доведіть, що при всіх натуральних значеннях $n$ дріб $\frac{2n^2 + 5n + 3}{3n^2 + 10n + 8}$ є нескоротним.

**1.48.** Квадратний тричлен $x^2 + ax + b$ має цілі корені, більші за 2. Доведіть, що число $a + b + 1$ — складене.

**1.49.** Остання цифра десяткового запису числа $n^2 + 8n$ дорівнює 4. Яка передостання цифра в записі цього числа?

# § 2. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

## 2. Основні методи доведення нерівностей

Очевидно, що нерівності $a^2 \geqslant 0$, $-a^2 - 1 < 0$, $|a| + |b| \geqslant 0$, $(a - b)^4 \geqslant 0$ виконуються *при всіх значеннях змінних*, які до них входять.

Нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ також виконується при будь-яких значеннях змінних $x$ і $y$, хоча цей факт не настільки очевидний. У його справедливості слід переконатися.

У таких випадках говорять, що потрібно **довести нерівність** $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Маємо:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2.$$

Вираз $(x - 4y)^2 + y^2$ набуває тільки невід'ємних значень. Отже, при будь-яких значеннях змінних $x$ і $y$ є правильною нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Для доведення нерівностей використовують різні прийоми. Наприклад, нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ ми довели, виділивши квадрат двочлена. Розглянемо ще кілька прийомів доведення нерівностей.

### Метод різниці

Цей прийом полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частин нерівності і доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних.

**ПРИКЛАД 1** Доведіть нерівність: $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geqslant 6ab$.

*Розв'язання.* Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = a^2b^2 - 4ab + 4 + a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$= (ab - 2)^2 + (a - b)^2.$$

При будь-яких значеннях $a$ і $b$ ця різниця набуває тільки невід'ємних значень, отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

**ПРИКЛАД 2** Доведіть, що коли $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} - (a + 2b + c) = \left(\frac{a^2}{a-b} - (a+b)\right) + \left(\frac{b^2}{b-c} - (b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c}.$$

Оскільки з умови $a > b > c$ випливає, що $a - b > 0$, $b - c > 0$ і $b^2 + c^2 \neq 0$, то $\frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c} > 0.$

**Метод спрощення нерівності**

У ряді випадків спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

**ПРИКЛАД 3** Доведіть нерівність:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду $1 - \frac{1}{n+1} < 1$ і стає очевидною.

**Метод, у якому застосовуються міркування «від супротивного»**

**ПРИКЛАД 4** Доведіть нерівність:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a + \sqrt{a}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{b}}.$$

*Розв'язання.* Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною, тобто існують такі значення $a$ і $b$, при яких є правильною нерівність $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{b}}$. Звідси:

$$\left(a + \sqrt{b}\right)\left(b + \sqrt{a}\right) < \left(a + \sqrt{a}\right)\left(b + \sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} < a\sqrt{b} + b\sqrt{a};$$

$$(a - b)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) < 0.$$

Остання нерівність є неправильною, оскільки при $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ різниці $a - b$ і $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ мають однакові знаки або дорівнюють нулю. Отримана суперечність означає, що задана нерівність є правильною.

**Метод застосування очевидної нерівності**

Цей прийом полягає в такому: задану нерівність отримують у результаті перетворення очевидної нерівності чи додавання або множення кількох очевидних нерівностей.

**ПРИКЛАД 5** Доведіть нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

*Розв'язання.* Очевидно, що при будь-яких значеннях $a$, $b$ і $c$ виконується така нерівність:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.$$

Звідси $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geqslant 0;$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

**ПРИКЛАД 6** Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

*Розв'язання.* Для невід'ємних значень $a$, $b$ і $c$ виконуються такі три очевидні нерівності:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0,$$
$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geqslant 0,$$
$$\left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Звідси

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$c + a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Оскільки обидві частини кожної з цих нерівностей набувають невід'ємних значень, то можна застосувати теорему про почленне множення нерівностей. Маємо:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Оскільки $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Отримуємо, що $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$.

**ПРИКЛАД 7** Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, виконується нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

*Розв'язання.* Оскільки з двох звичайних дробів з однаковими чисельниками більшим є той, у якого знаменник менший, то можна записати $n$ очевидних нерівностей:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n};$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n};$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Застосовуючи теорему про почленне додавання нерівностей, отримаємо:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ доданків}}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

### Метод застосування раніше доведеної нерівності

Нерідко раніше доведена нерівність може бути використана для доведення іншої, більш складної нерівності.

➢ **Застосування нерівності $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$**

**ПРИКЛАД 8** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2}\leqslant\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{c+a}{2ca}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}.$$

Звідси

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

➢ **Застосування нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$**

**ПРИКЛАД 9** Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c)$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=$$
$$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geqslant(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=$$
$$=ab^2c+bc^2a+ca^2b=abc\,(a+b+c).$$

**2.1.°** Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

1) $(y + 5)(y - 2) \geqslant 3y - 10$; 3) $a(a - 2) \geqslant -1$;
2) $8m^2 - 6m + 1 \leqslant (3m - 1)^2$; 4) $(b + 7)^2 > 14b + 40$.

**2.2.°** Доведіть нерівність:

1) $(2a - 5)^2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$; 2) $a^2 + 4 \geqslant 4a$.

**2.3.°** Доведіть нерівність:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $9x^2 - 6xy + 5y^2 \geqslant 0$;
5) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;

6) $a(a-3) > 5(a-4)$;
7) $(a-b)(a+5b) \leqslant (2a+b)(a+4b)+ab$.

**2.4.°** Доведіть нерівність:
1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $16x^2 - 8xy + 2y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b-1) < b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1)-(p-3)(p+3) > 3(p^2+p)$.

**2.5.°** Доведіть, що:
1) коли $a \geqslant 6$, то $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$;
2) коли $a \geqslant b$, то $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3$.

**2.6.°** Доведіть, що коли $x \geqslant 4$, то $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$.

**2.7.°** Доведіть, що при всіх значеннях змінної є правильною нерівність $\frac{a^2}{a^4+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

**2.8.°** Доведіть, що коли $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

**2.9.°** Доведіть, що коли $a < b < c$, то $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

**2.10.°** Доведіть, що при всіх значеннях змінних є правильною нерівність:
1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a+b+c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$;
6) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

**2.11.°** Доведіть, що при всіх значеннях змінних є правильною нерівність:
1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a+b+c) - 3$.

**2.12.°** Доведіть, що коли $a \in [0; 1]$, то $a \geqslant a^2$.

**2.13.°** Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + b^2a$.

**2.14.°** Доведіть нерівність $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + b^3a$.

**2.15.°** Доведіть, що:
1) коли $0 < a < b$, $k > 0$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$;
2) коли $a \geqslant b > 0$, $k > 0$, то $\frac{a}{b} \geqslant \frac{a+k}{b+k}$.

**2.16.**° Доведіть, що при будь-яких значеннях $x$, $y$ і $z$ хоча б один з виразів $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ набуває невід'ємних значень.

**2.17.**° Доведіть, що:

1) коли $x \leqslant 1$ і $y \leqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$;

2) коли $x \geqslant 1$ і $y \geqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$.

**2.18.**° Доведіть, що:

1) $\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$, де $b > 0$; 2) $\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$, де $a > 0$, $b > 0$.

**2.19.**° Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geqslant \frac{x + y}{2}$.

**2.20.**° Доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, де $n$ — непарне натуральне число.

**2.21.**° Для $a > 0$, $b > 0$ доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, де $n$ — парне натуральне число.

**2.22.**° Доведіть, що при $b > 0$ виконується нерівність $\frac{a^3}{a^2 + b^2} \geqslant a - \frac{b}{2}$.

**2.23.**° Доведіть, що при $a > 0$ і $b > 0$ виконується нерівність $\frac{a}{b + 2a} + \frac{b}{a + 2b} \leqslant \frac{2}{3}$.

**2.24.**° Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, то $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a + b)^2}{x + y}$.

**2.25.**° Відомо, що $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$. Доведіть, що

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \leqslant \frac{2}{1 + xy}.$$

**2.26.**° Доведіть нерівність $a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0$.

**2.27.**° Доведіть нерівність $x^8 + x^6 - 2x^3 + x^2 + 1 > 0$.

**2.28.**° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $d \geqslant 0$, то $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

**2.29.**° Доведіть, що при $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:

1) $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n - 1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $2\sqrt{n + 1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**2.30.**° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} > \frac{3}{a + b + c}.$$

**2.31.**° Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} \leqslant 1.$$

**2.32.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a+b}{1+a+b}$.

**2.33.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1.$$

**2.34.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

**2.35.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd$.

**2.36.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $(a^4b^4 + 36)(4a^4 + 9b^4) \geqslant 144a^4b^4$.

**2.37.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \geqslant 4ab$.

**2.38.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $x^4 + 4y^4 + 5 \geqslant 8xy$.

**2.39.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $y \geqslant 0$, то $x^4 + 4y^3 + y + 2x^2 + 1 \geqslant 8xy$.

**2.40.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $b \geqslant 0$, то $a^4 + b^3 + b + 1 \geqslant 4ab$.

**2.41.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + b + a$.

**2.42.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $4a^2 + b^2 + 1 \geqslant 2ab + 2a + b$.

**2.43.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

**2.44.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

**2.45.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

**2.46.**$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

**2.47.**$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c.$$

**2.48.**$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доведіть, що

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leqslant 3.$$

**2.49.**$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $xy \geqslant 2$. Доведіть, що $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 \geqslant 8$.

**2.50.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + ab \geqslant 3(a + b - 1)$.

**2.51.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що при будь-яких значеннях $a$, $b$ і $c$ хоча б одна з нерівностей $a - b^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $b - c^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $c - a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

**2.52.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що при будь-яких додатних значеннях $a$, $b$ і $c$ хоча б одна з нерівностей $a(1 - b) \leqslant \frac{1}{4}$, $b(1 - c) \leqslant \frac{1}{4}$, $c(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

**2.53.••** Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$.

**2.54.••** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geqslant 1.$$

**2.55.••** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

**2.56.••** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Доведіть, що $a + b + c \geqslant 3$.

**2.57.••** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $ab \geqslant a + b$. Доведіть, що $a + b \geqslant 4$.

**2.58.••** Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то

$$(x + y + 1)^2 \geqslant 4(x^2 + y^2).$$

**2.59.••** Доведіть нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.60.*** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 1$, то

$$\frac{xy^2}{x^3 + 2} + \frac{yz^2}{y^3 + 2} + \frac{zx^2}{z^3 + 2} \geqslant 1.$$

**2.61.*** Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant (a + b + c + d)\,e$.

**2.62.*** Доведіть нерівність $(n!)^2 \geqslant n^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.63.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.64.*** Доведіть нерівність $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! < (n + 1)!$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.65.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.66.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

**2.67.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

**2.68.*** Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2},$$ де $n \in \mathbb{N}$.

**2.69.*** Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} < \frac{\sqrt{2n}}{2},$$ де $n \in \mathbb{N}$.

# 3. Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші—Буняковського

Значення виразів $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $\dfrac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ називають відповідно середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонічним чисел $a$ і $b$.

Ці величини називають «середніми», оскільки при $0 < a \leqslant b$ виконуються нерівності:

$$a \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant b,\quad a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b,\quad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b,\quad a \leqslant \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leqslant b.$$

Зв'язок між «середніми» виражають такі три теореми.

**Теорема 3.1.** ***При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність***

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}. \qquad (*)$$

Доведення. Маємо:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab;$$
$$2a^2+2b^2 \geqslant 2ab+a^2+b^2;$$
$$2a^2+2b^2 \geqslant (a+b)^2;$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4};$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{|a+b|}{2}.$$

Оскільки $|a+b| \geqslant a+b$, то $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$. ▲

Зауважимо, що в нерівності (*) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

**Теорема 3.2 (нерівність Коші для двох чисел).** ***При будь-яких невід'ємних значеннях a і b виконується нерівність***

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (**)$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях $a$ і $b$ ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною. ▲

Зауважимо, що в нерівності (**) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

**Наслідок.** ***Якщо $a > 0$, то $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, причому $a+\frac{1}{a}=2$ тоді й тільки тоді, коли $a = 1$.***

Доведення. До додатних чисел $a$ і $\frac{1}{a}$ застосуємо нерівність Коші:

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geqslant\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1.\text{ Звідси } a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$$

Рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a=\frac{1}{a}$. З урахуванням того, що $a > 0$, отримуємо $a = 1$. ▲

При розв'язуванні цілої низки задач у попередньому пункті, а також при доведенні теореми 3.1 ми використовували нерівність $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Цю нерівність також можна розглядати як наслідок з нерівності Коші. Справді, оскільки $a^2 \geqslant 0$ і $b^2 \geqslant 0$, то можна записати

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\sqrt{a^2b^2}.\text{ Звідси } a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|\geqslant 2ab.$$

**Теорема 3.3.** ***Якщо $ab > 0$, то***

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (***)$$

Доведення. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<0$ і $\sqrt{ab}>0$. У цьому разі нерівність, що доводиться, стає очевидною.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при $a > 0$ і $b > 0$ набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}. \ \blacktriangle$$

Зауважимо, що в нерівності (***) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Теореми 3.1–3.3 дозволяють дійти висновку, що **при $a > 0$ і $b > 0$ є справедливим такий ланцюжок нерівностей:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$$

Проілюструємо застосування теорем 3.1–3.3 на прикладах.

**ПРИКЛАД 1** Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geqslant \sqrt{2}.$$

*Розв'язання.* Скориставшись нерівністю (*), можна записати:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{x+1-y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{(1-x)^2+y^2}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{1-x+y}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geqslant \sqrt{2}\left(\frac{x+1-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

**ПРИКЛАД 2** Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

*Розв'язання.* Застосовуючи нерівність Коші, можна записати:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\frac{b+\frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$. Тоді

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} = 4.$$

**ПРИКЛАД 3** Знайдіть найбільше значення виразу $ab$, якщо відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $2a + b = 3$.

*Розв'язання.* Маємо: $\frac{3}{2} = \frac{2a+b}{2} \geqslant \sqrt{2ab}$. Звідси $\sqrt{2ab} \leqslant \frac{3}{2}$; $ab \leqslant \frac{9}{8}$.

Остання нерівність ще не дозволяє зробити висновок, що найбільше значення виразу $ab$ дорівнює $\frac{9}{8}$. Необхідно також показати, що існують такі значення $a$ і $b$, при яких $ab = \frac{9}{8}$.

У записаній нерівності Коші для чисел $2a$ і $b$ рівність досягається лише тоді, коли $2a = b$. Тепер потрібні значення $a$ і $b$ можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Звідси $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{2}$.

Отже, найбільше значення виразу $ab$ дорівнює $\frac{9}{8}$.

**ПРИКЛАД 4** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

*Розв'язання.* Маємо: $\frac{a^4}{bc} + bc \geqslant 2\sqrt{\frac{a^4}{bc} \cdot bc} = 2a^2$. Звідси

$$\frac{a^4}{bc} \geqslant 2a^2 - bc.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\frac{b^4}{ca} \geqslant 2b^2 - ca;$$

$$\frac{c^4}{ab} \geqslant 2c^2 - ab.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Тут ми скористалися тим, що $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (див. приклад 5 п. 2).

**ПРИКЛАД 5** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

*Розв'язання.* Введемо позначення: $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$.

Звідси $a + b + c = x + y + z$, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$.

Маємо: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - \frac{3}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

**ПРИКЛАД 6** Доведіть, що коли $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$ і $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$, то $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \geqslant 3$.

*Розв'язання.* Запишемо нерівність (***) у такому вигляді: $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$.

Маємо: $\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)\cdot 1} \geqslant \frac{2(x-1)\cdot 1}{x-1+1} = \frac{2x-2}{x} = 2 - \frac{2}{x}$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\sqrt{y-1} \geqslant 2 - \frac{2}{y},$$

$$\sqrt{z-1} \geqslant 2 - \frac{2}{z}.$$

Тоді $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \geqslant 6 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}\right) = 6 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$

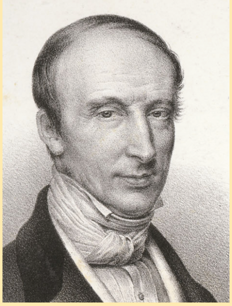
**Теорема 3.4 (нерівність Коші—Буняковського).** ***При будь-яких значеннях $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ виконується нерівність***

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

**Лема.** ***Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, де $a > 0$, при всіх значеннях $x$ набуває невід'ємних значень, то його дискримінант $D$ недодатний.***

Доведення. Припустимо, що для даного квадратного тричлена $D > 0$. Тоді квадратний тричлен має два різні корені $x_1$ і $x_2$ і можна записати $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

За умовою $a(x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0$ при будь-якому значенні змінної $x$, а отже, і при $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



*Огюстен Луї Коші*
(1789–1857)
Видатний французький математик, автор понад 800 наукових праць.

*Віктор Якович Буняковський*
(1804–1889)
Видатний математик XIX ст. Народився на Вінниччині. Протягом багатьох років був віце-президентом Петербурзької академії наук.

Маємо: $a\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right) \geqslant 0.$ Звідси

$$a\,(x_2 - x_1)\,(x_1 - x_2) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a > 0$ і $(x_2 - x_1)\,(x_1 - x_2) < 0$, то нерівність (1) є неправильною. Отже, припущення про те, що $D > 0$, також неправильне. ▲

Доведення теореми. Якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0.

При будь-якому значенні змінної $x$ виконується нерівність

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 \geqslant 0.$$

Цю нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \geqslant 0.$$

Ліва частина останньої нерівності — це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної $x$. Отже, за лемою його дискримінант $D$ недодатний.

Маємо:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Оскільки $D \leqslant 0$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \blacktriangle$$

Якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то рівність у нерівності Коші—Буняковського досягається при будь-яких значеннях $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0.

Покажемо, що в нерівності Коші—Буняковського рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число $k$, що виконуються рівності

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ \ldots,\ b_n = ka_n. \qquad (2)$$

Легко показати (зробіть це самостійно), що коли виконується умова (2), то нерівність Коші—Буняковського перетворюється на рівність.

Доведемо обернене твердження. Нехай

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Це означає, що квадратне рівняння

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 0$$

має єдиний корінь. Нехай цей корінь дорівнює $k$. Тоді число $k$ є коренем рівняння

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Отже, виконуються рівності

$$a_1k = b_1,\ a_2k = b_2,\ \ldots,\ a_nk = b_n.$$

**ПРИКЛАД 7** Доведіть нерівність

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

*Розв'язання.* Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського, запишемо:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\underbrace{(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)}_{n \text{ доданків}} = n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

З доведеної нерівності можна отримати таку нерівність:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Вирази, записані в лівій і правій частинах цієї нерівності, називають відповідно **середнім квадратичним** і **середнім арифметичним** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ця нерівність є узагальненням нерівності (*).

**ПРИКЛАД 8** Для додатних чисел $a$, $b$ і $c$ доведіть нерівність:

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2.$$

*Розв'язання.* До наборів чисел $\left(a\sqrt{a};\, b\sqrt{b};\, c\sqrt{c}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\, \frac{1}{\sqrt{b}};\, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\left(a\sqrt{a}\right)^2+\left(b\sqrt{b}\right)^2+\left(c\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Звідси $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2.$

**ПРИКЛАД 9** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} = 2|x-1|$.

*Розв'язання.* Перепишемо ліву частину рівняння так:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}.$$

До наборів $\left(\sqrt{3};\, 1\right)$ і $\left(\sqrt{x};\, \sqrt{x^2-3x+1}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant \left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\right).$$

Звідси $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant 4(x^2-2x+1);$

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right| \leqslant 2|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} \leqslant 2|x-1|.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число $k$, що

$$\begin{cases}\sqrt{3} = k\sqrt{x},\\ 1 = k\sqrt{x^2-3x+1}.\end{cases}$$ Звідси $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}$.

Отримане рівняння рівносильне заданому.

Маємо: $\begin{cases}\frac{x}{3} = x^2-3x+1,\\ x \geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-10x+3 = 0,\\ x \geqslant 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x = 3,\\ x = \frac{1}{3}.\end{array}\right.$

*Відповідь*: 3; $\frac{1}{3}$.

**3.1.°** Доведіть, що коли $m > 0$, $x > 0$, $y > 0$, то $mx+\frac{y}{4m} \geqslant \sqrt{xy}$.

**3.2.°** Відомо, що $xy = 1$, $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Доведіть нерівність $ax+by \geqslant 2\sqrt{ab}$.

**3.3.°** Для додатних чисел $a$ і $b$ доведіть нерівність $\frac{a}{16b}+\frac{25b}{a}\geqslant\frac{5}{2}$.

**3.4.°** Для додатних чисел $x$ і $y$ доведіть нерівність $\frac{3x}{y}+\frac{y}{27x}\geqslant\frac{2}{3}$.

**3.5.°** Доведіть нерівність $(x+y)(xy+16)\geqslant 16xy$, де $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

**3.6.°** Доведіть, що коли $a>0$ і $b>0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

**3.7.°** Доведіть, що коли $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, то $(a^3+b)(b^3+a)\geqslant 4a^2b^2$.

**3.8.°** Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geqslant 8.$$

**3.9.°** Доведіть, що коли $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то $(x+1)(y+1)(xy+1)\geqslant 8xy$.

**3.10.°** Доведіть нерівність $\frac{a^2+4}{2}\geqslant\sqrt{a^2+3}$.

**3.11.°** Доведіть нерівність $\frac{x^2+6}{4}\geqslant\sqrt{x^2+2}$.

**3.12.°** При $a>0$ доведіть нерівність $2\left(a+\frac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 4a$.

**3.13.°** Доведіть нерівність $x^2+\frac{1}{x^2+1}\geqslant 1$.

**3.14.°** Доведіть нерівність $a^2+b^2+\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+1}>1$.

**3.15.°** Відомо, що $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. Доведіть, що $|ac+bd|\leqslant 1$.

**3.16.°** Відомо, що $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. Доведіть, що $|ac-bd|\leqslant 1$.

**3.17.°** Доведіть нерівність $\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}\geqslant|1+ab|$.

**3.18.°** Дано: $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$. Доведіть, що $-1\leqslant ax+by+cz\leqslant 1$.

**3.19.°** Дано: $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=3$. Доведіть, що $-\sqrt{3}\leqslant ax+by+cz\leqslant\sqrt{3}$.

**3.20.•** Доведіть, що коли добуток двох додатних чисел є сталим, то їх сума буде найменшою тоді, коли ці числа рівні.

**3.21.•** Доведіть, що коли сума двох додатних чисел є сталою, то їх добуток буде найбільшим тоді, коли ці числа рівні.

**3.22.•** Відомо, що $x>0$ і $xy=12$. Знайдіть найменше значення виразу $x+3y$.

**3.23.•** Знайдіть найменше значення виразу $5a+2b$, якщо $a>0$ і $ab=10$.

**3.24.**° Знайдіть найбільше значення виразу $xy$, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $x + 3y = 6$.

**3.25.**° Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $3a + 4b = 24$. Знайдіть найбільше значення виразу $ab$.

**3.26.**° Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + \frac{16}{x^2}$.

**3.27.**° Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу

$$\frac{x^2 + 10x + 16}{x}.$$

**3.28.**° Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{9x^2 + 1}$, якщо $x > 0$.

**3.29.**° Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{4x^2 + 3x + 1}$.

**3.30.**° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2$.

**3.31.**° Доведіть нерівність $\frac{\sqrt{a^2 + 5}}{a^2 + 6} < \frac{1}{2}$.

**3.32.**° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$.

**3.33.**° Відомо, що $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Доведіть нерівність

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

**3.34.**° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} \geqslant 6.$$

**3.35.**° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4.$$

**3.36.**° Для додатних чисел $a$ і $b$ доведіть нерівність

$$\frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geqslant 4.$$

**3.37.**° Для додатних чисел $a$ і $b$ доведіть нерівність

$$\frac{(a + 1)^2}{b} + \frac{(b + 1)^2}{a} \geqslant 8.$$

**3.38.**° Відомо, що $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $a + b \geqslant \frac{1}{2}$. Доведіть нерівність $\sqrt{(1 - a)(1 - b)} \leqslant \frac{3}{4}$.

**3.39.**° Відомо, що $|a| \leqslant 1$ і $|b| \leqslant 1$. Доведіть нерівність $ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leqslant 1$.

**3.40.**$^\bullet$ Відомо, що $a + b = 1$. Доведіть, що $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

**3.41.**$^\bullet$ Відомо, що $a + b = 2$. Доведіть, що $a^4 + b^4 \geqslant 2$.

**3.42.**$^\bullet$ Доведіть, що коли $a^4 + b^4 = 2$, то $|a + b| \leqslant 2$.

**3.43.**$^\bullet$ Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}$.

**3.44.**$^\bullet$ Доведіть, що $\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right| \leqslant 1$.

**3.45.**$^\bullet$ Доведіть, що коли $x + y + z = 1$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

**3.46.**$^\bullet$ Відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Доведіть, що

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant n.$$

**3.47.**$^\bullet$ Доведіть, що коли $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $|a+b+c| \leqslant \sqrt{3}$.

**3.48.**$^\bullet$ Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x + 4y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

**3.49.**$^\bullet$ Знайдіть найменше значення виразу $a^2 + b^2$, якщо $5a - 12b = 13$.

**3.50.**$^\bullet$ Доведіть нерівність $(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leqslant 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$.

**3.51.**$^\bullet$ Доведіть нерівність $(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geqslant (a+b+c)^2$.

**3.52.**$^\bullet$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

**3.53.**$^\bullet$ Для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доведіть, що

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

**3.54.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність

$$(a+c)(b+d) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{c^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+d^2}.$$

**3.55.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $a + b + c = 3$, то

$$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1} \leqslant 6.$$

**3.56.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність $\sqrt{2a+5}+\sqrt{a-3}+\sqrt{25-3a} < 9$.

**3.57.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

**3.58.**$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $x^2 + y^2 + z^2 = 44$, то $|3x - y + z| \leqslant 22$.

**3.59.**$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Доведіть нерівність

$$|2x+y-z| \leqslant 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**3.60.**•• Доведіть, що коли $a > 1$ і $b > 1$, то $\dfrac{a}{\sqrt{b-1}} + \dfrac{b}{\sqrt{a-1}} \geqslant 4$.

**3.61.**•• Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то
$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

**3.62.**•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $a + b = 1$. Доведіть, що
$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

**3.63.**•• Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то
$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} \geqslant 2\sqrt{a+b}.$$

**3.64.*** Доведіть нерівність
$$\sqrt{(a+b-1)^2 + 2c^2} + \sqrt{(b+c-1)^2 + 2a^2} + \sqrt{(c+a-1)^2 + 2b^2} \geqslant \sqrt{3}.$$

**3.65.*** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ і $DA$ квадрата $ABCD$ відповідно позначили точки $M$, $N$, $P$ і $Q$. Доведіть, що периметр чотирикутника $MNPQ$ не менший від суми діагоналей квадрата.

**3.66.*** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$, то
$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

**3.67.*** Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність
$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

**3.68.*** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

**3.69.*** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

## 4. Ефективні прийоми доведення нерівностей

Матеріал двох попередніх пунктів переконує нас у тому, що найбільш ефективним методом доведення нерівностей є застосування раніше доведеної нерівності.

Якщо за допомогою деякої нерівності можна довести цілу низку інших більш складних нерівностей, то таку нерівність називатимемо **ключовою**. Так, нерівності $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, нерівності між середніми величинами, нерівність Коші—Буняковського, безумовно, можна віднести до ключових нерівностей.

У цьому пункті ви ознайомитесь ще з кількома ключовими нерівностями.

У задачі 2.18 ви довели нерівність

$$\boxed{\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b, \text{ де } b > 0} \qquad (*)$$

Зауважимо, що в нерівності (*) рівність досягається лише при $a = b$.

Покажемо, що цю просту нерівність можна віднести до ключових.

**ПРИКЛАД 1** **(приклад 2 п. 2)** Доведіть, що коли $a > b > c$, то $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.

*Розв'язання.* З умови випливає, що $a - b > 0$ і $b - c > 0$. Тоді

$$\frac{a^2}{a-b} \geqslant 2a - (a - b) = a + b,$$

$$\frac{b^2}{b-c} \geqslant 2b - (b - c) = b + c.$$

Зауважимо, що рівності $a = a - b$ і $b = b - c$ виконуються одночасно лише за умови $b = c = 0$. Тому в записаних нерівностях рівність одночасно досягатися не може.

Звідси $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + b + b + c = a + 2b + c$.

**ПРИКЛАД 2** **(приклад 4 п. 3)** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant a^2 + b^2 + c^2$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{a^4}{bc} = \frac{(a^2)^2}{bc} \geqslant 2a^2 - bc,$$

$$\frac{b^4}{ac} = \frac{(b^2)^2}{ac} \geqslant 2b^2 - ac,$$

$$\frac{c^4}{ab} = \frac{(c^2)^2}{ab} \geqslant 2c^2 - ab.$$

Звідси $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$.

**ПРИКЛАД 3** (3.67[1])

Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x + y + z).$$

[1] У задачі 3.67 цю нерівність було запропоновано довести за допомогою нерівності Коші—Буняковського або нерівності Коші.

*Розв'язання.* Якщо нерівність (*) застосувати таким чином:

$$\frac{x^2}{y+z} \geqslant 2x - y - z,$$

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant 2y - z - x,$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant 2z - x - y,$$

то отримаємо

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant 2x - y - z + 2y - z - x + 2z - x - y = 0.$$

Але для такого результату не потрібне застосування будь-яких ключових задач.

Проте це не означає, що нерівність (*) незастосовна для даного прикладу.

Маємо: $\frac{x^2}{y+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x)^2}{y+z} \geqslant \frac{1}{4}(4x - y - z)$.

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant \frac{1}{4}(4y - z - x),$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{4}(4z - x - y).$$

Тепер за допомогою теореми про почленне додавання нерівностей отримуємо потрібний результат.

Нерівність (*) можна узагальнити. Насправді є справедливою така нерівність:

$$(n-k)\frac{a^n}{b^k} \geqslant na^{n-k} - kb^{n-k}, \text{ де } n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ n \geqslant k,\ a > 0,\ b > 0.$$

Окремий випадок цієї нерівності, коли $n = k + 1$, а саме нерівність

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k} \geqslant (k+1)a - kb, \text{ де } k \in \mathbb{N},\ a > 0 \text{ і } b > 0} \qquad (**)$$

ви зможете довести в п. 24 (задача 24.17).

Зазначимо, що в задачі 2.18 ви довели цю нерівність для $n = 2$:

$$\boxed{\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b, \text{ де } a > 0 \text{ і } b > 0}$$

**ПРИКЛАД 4** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant -a + 2b + 2c.$$

*Розв'язання.* Застосувавши нерівність (**), запишемо:

$$\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geqslant 3b - 2c,$$

$$\frac{c^4}{a^3} \geqslant 4c - 3a.$$

Залишилося застосувати теорему про почленне додавання нерівностей.

У задачі 2.24 ви довели таку нерівність:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ де } x > 0,\ y > 0}$$

Застосовуючи цю нерівність, нескладно довести нерівність:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ де } x > 0,\ y > 0,\ z > 0} \qquad (***)$$

Маємо: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$

Нерівність (***) є ключем до розв'язання цілої низки непростих задач. Розглянемо приклади її застосування.

Насамперед покажемо, як, використовуючи нерівність (***), можна довести вже відому вам (див. задачу 3.67 і приклад 3 цього пункту) нерівність.

**ПРИКЛАД 5** Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

*Розв'язання*

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{y+z+z+x+x+y} = \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

**ПРИКЛАД 6** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geqslant 1.$$

*Розв'язання*

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} = \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ca+a^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.$$

**ПРИКЛАД 7** Для додатних чисел $x$, $y$, $z$ доведіть нерівність

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

*Розв'язання.* $\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} = 2\left(\frac{1^2}{x+y} + \frac{1^2}{y+z} + \frac{1^2}{z+x}\right) \geqslant$

$$\geqslant 2 \cdot \frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{9}{x+y+z}.$$

Після того як за допомогою задачі 2.24 ми довели нерівність (***), природно висунути припущення, що має місце така нерівність:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n},$$

де $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ — додатні числа.

Ви навчитеся доводити такі нерівності в п. 24 (див. задачу 24.12).

Якщо в останній нерівності покласти $x_1 = a_1b_1$, $x_2 = a_2b_2$, ..., $x_n = a_nb_n$, $y_1 = b_1^2$, $y_2 = b_2^2$, ..., $y_n = b_n^2$, то отримаємо:

$$\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2} + \ldots + \frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2} \geqslant \frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Звідси $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$,

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Таким чином, отримано ще один спосіб доведення нерівності Коші—Буняковського.

**4.1.°** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

**4.2.°** **(2.54)** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2xz} + \frac{z^2}{z^2+2xy} \geqslant 1.$$

**4.3.°** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant a+b+c.$$

**4.4.**•• Для додатних чисел $x$, $y$ і $z$ доведіть нерівність

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

**4.5.**•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

**4.6.••** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то
$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

**4.7.••** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$. Доведіть нерівність
$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}.$$

**4.8.••** Дано: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доведіть, що:
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**4.9.••** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то
$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geqslant \frac{1}{2}.$$

**4.10.•• (приклад 5 п. 3)** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

**4.11.*** Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність
$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant \sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

**4.12.*** Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність
$$\frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \leqslant 1.$$

**4.13.*** Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність
$$\frac{1}{1+x+yz} + \frac{1}{1+y+xz} + \frac{1}{1+z+xy} \leqslant \frac{3}{x+y+z}.$$

**4.14.*** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

**4.15.*** Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $a + b + c = 1$, то
$$a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) \geqslant 2abc.$$

**4.16.*** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 1$, то
$$\frac{1}{a(b^3+c^3)} + \frac{1}{b(c^3+a^3)} + \frac{1}{c(a^3+b^3)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

**4.17.*** Для додатних чисел $a$, $b$ і $c$ доведіть нерівність
$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geqslant a+b+c.$$

**4.18.*** Доведіть нерівність $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+a^2} \geqslant \dfrac{a+b+c}{2}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

**4.19.*** Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть, що:

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx} \geqslant \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}.$$

**4.20.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

**4.21.*** Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2$, де $n \in \mathbb{N}$.

## Відповіді та вказівки до вправ

**1.10.** 6. **1.12.** Більше тих, у яких цифри записано в порядку спадання. **1.15.** 3) $a^2 - a + 5$; 4) $x^{48} + x^{24} + 1$. **1.16.** 1) 2; 2) 1. **1.17.** $\frac{4}{x(x+16)}$. **1.18.** 1) $\frac{2(1-3y)}{(3y+1)(2x+7)}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$; 3) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **1.19.** 3) $\frac{x-y}{x+y}$; 4) 1. **1.20.** 1) 2; 2) $(4; +\infty)$. **1.21.** 2) Якщо $a = 2$, то $x$ — будь-яке; якщо $a > 2$, то $x \geqslant -a - 2$; якщо $a < 2$, то $x \leqslant -a - 2$. **1.22.** 1) $[2; +\infty) \cup \{-1\}$; 2) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $[1; +\infty) \cup \{-2\}$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$. **1.23.** 1) Якщо $a \leqslant 1$, то $x \geqslant a$; якщо $1 < a \leqslant 3$, то $x \geqslant a$ або $x = 1$; якщо $a > 3$, то $x \geqslant a$, або $x = 1$, або $x = 3$. **1.24.** 4) $[-1; 4]$; 6) 2; $-2$. **1.25.** 4) $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **1.28.** 1) 1; 2) 2; 3; 3) 1; 4. **1.29.** 1) (0; 2), (4; 2); 2) (1; $-1$), (1; 2), (5; $-1$), (5; 2); 3) (1; $-1$), ($-1$; 1). **1.30.** 1) Якщо $a = 1$, то $x \geqslant 3$; якщо $a \neq 1$, то $x = 3$; 2) якщо $a < 1$, то $x = a$, або $x = 1$, або $x = 3$; якщо $1 \leqslant a < 3$, то $x = a$ або $x = 3$; якщо $a \geqslant 3$, то $x = a$; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то $x = 1$ або $x = a^2$. **1.31.** 1) 6; 2) $6\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}+1$; 4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **1.32.** 1) $\sqrt{a-3}+1$; 2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{a-3}$; 4) 1. **1.33.** 1) 1; 2) $2ab$; 3) $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$; 4) $\frac{x+y}{2}$. **1.36.** $a = 1$. **1.37.** $a = 2$. **1.38.** 1) 9; 2) 0; 3) $-3$; $-1$; 2; 6. **1.39.** 1) 2; 3; $\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$; 3) $-2$; 3; $\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2; 5) $-1\pm\sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; 6) 1; $-1$; $2\pm\sqrt{3}$; 7) $-4$; 8) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. **1.42.** Не існують. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що значення виразу $5^n + 1$ не кратне 4. **1.45.** $m = 4$, $n = 6$. *Вказівка*. При $m \geqslant 5$ остання цифра десяткового запису числа $m! + 12$ дорівнює 2. **1.46.** 25; 76. *Вказівка*. Шукане число $n$ таке, що число $(n^2 - n)$ кратне 100. Далі скористайтеся тим, що НСД $(n; n - 1) = 1$. **1.47.** *Вказівка*. $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8} = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(3n+4)}$. Доведіть, що НСД $(n + 1; n + 2) = 1$, НСД $(n + 1; 3n + 4) = 1$, НСД $(2n + 3; n + 2) = 1$, НСД $(2n + 3; 3n + 4) = 1$. **1.48.** *Вказівка*. Можна записати $x^2 + ax + b = (x - x_1) \times (x - x_2)$, де $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1 > 2$, $x_2 > 2$. Звідси $1 + a + b = (1 - x_1) \times (1 - x_2)$. **1.49.** 8. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що дві останні цифри запису числа $n^2 + 8n + 16$ — нулі. **2.10.** 1) *Вказівка.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **2.16.** *Вказівка.* Розгляньте суму даних виразів. **2.17.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.19.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.23.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.24.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.25.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.26.** *Вказівка.* Ліву частину нерівності можна записати так: $(a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2)$. **2.28.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **2.29.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **2.31.** *Вказівка.* Оскільки $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $\frac{x}{1+y} \leqslant \frac{x}{x+y}$ і $\frac{y}{1+x} \leqslant \frac{y}{y+x}$. **2.34.** *Вказівка.* Скористайтесь ключовою задачею 2.15 (1). **2.37.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $1 + x^2 \geqslant 2x$. **2.38.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $x^4 + 4 \geqslant 4x^2$ і $4y^4 + 1 \geqslant 4y^2$. **2.39.** *Вказівка.* Доведіть, що $4y^3 + y \geqslant 4y^2$ при $y \geqslant 0$. **2.42.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ для $x = 2a$, $y = b$, $z = 1$. **2.48.** *Вказівка.* Запишіть нерівність, що доводиться, у вигляді $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$. **2.49.** *Вказівка.* Маємо: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 - 8 = (x - y)^2 - 4(x - y) + 2xy$. **2.50.** *Вказівка.* Покажіть, що $a^2 + b^2 + ab - 3(a + b - 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)(b - 1)$. **2.51.** *Вказівка.* Нехай твердження, що доводиться, хибне. Тоді є правильними нерівності $a - b^2 - \frac{1}{4} > 0$, $b - c^2 - \frac{1}{4} > 0$, $c - a^2 - \frac{1}{4} > 0$. Додайте ці нерівності і отримайте суперечність. **2.52.** *Вказівка.* Зауважимо, що коли є правильною одна з нерівностей $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$, то твердження, що доводиться, очевидне. Нехай $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$ і є правильними нерівності $a(1 - b) > \frac{1}{4}$, $b(1 - c) > \frac{1}{4}$, $c(1 - a) > \frac{1}{4}$. Звідси $a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) > \frac{1}{64}$. Доведіть, що при $0 < x < 1$ виконується нерівність $0 < x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$. **2.53.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що при $a > 0$ і $b > 0$ $\frac{1}{a^2 + b^2} \leqslant \frac{1}{2ab}$. **2.54.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $2ab \leqslant a^2 + b^2$. **2.56.** *Вказівка.* Доведіть, що $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ac)$. **2.58.** *Вказівка.* Оскільки при заданій умові $x^2 \leqslant x$ і $y^2 \leqslant y$, то достатньо довести нерівність $(x + y + 1)^2 \geqslant 4(x + y)$. **2.59.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$,

де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. **2.60.** *Вказівка*. Ліва частина нерівності тотожно дорівнює виразу $\frac{xy^2}{x^3+2xyz}+\frac{yz^2}{y^3+2xyz}+\frac{zx^2}{z^3+2xyz}=\frac{y^2}{x^2+2yz}+\frac{z^2}{y^2+2zx}+$ $+\frac{x^2}{z^2+2xy}$. Далі див. розв'язання задачі 2.54. **2.61.** *Вказівка*.
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(a^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(b^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(c^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(d^2+\frac{1}{4}e^2\right)$.
**2.62.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $1\cdot n \geqslant n$; $2\cdot(n-1)\geqslant n$; ...; $k\cdot(n-k+1)\geqslant n$, де $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant k\leqslant n$. **2.63.** *Вказівка*. Перетворіть ліву частину нерівності, що доводиться, за допомогою рівності $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, де $k\in\mathbb{N}$. **2.64.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $k\cdot k!=(k+1)!-k!$, $k\in\mathbb{N}$. **2.65.** *Вказівка*. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Далі див. приклад 3 п. 2.
**2.66.** *Вказівка*. Нехай $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Маємо: $A<B$. Звідси $A^2<AB=\frac{1}{2n+1}$. **2.67.** *Вказівка*. Нехай $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $C=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$. Маємо: $A>C$, $A^2>AC=\frac{1}{4n}$. **2.68.** *Вказівка*. Нехай $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+$ $+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}$, $S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$. Очевидно, що $S>S_1$. Тоді $2S>S+S_1$. **3.10.** *Вказівка*. $a^2+4=$ $=(a^2+3)+1$. **3.16.** *Вказівка*. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a;\ -b)$ і $(c;\ d)$. **3.22.** 12. **3.23.** 20. **3.24.** 3. **3.25.** 12. **3.26.** 8. **3.27.** 18. **3.28.** $\frac{1}{6}$. **3.29.** $\frac{1}{7}$. **3.30.** *Вказівка*. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. **3.38.** *Вказівка*. $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant$ $\leqslant\frac{1-a+1-b}{2}$. **3.40.** *Вказівка*. I спосіб. Скористайтеся тим, що $x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$. II спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(1;\ 1)$ і $(a;\ b)$. **3.43.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середнє гармонічне чисел $a$ і $b$ не більше за їх середнє арифметичне. **3.44.** *Вказівка*. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(a;\ \sqrt{1-a^2}\right)$ і $\left(\sqrt{1-b^2};\ b\right)$. **3.45.** *Вказівка*. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(1;\ 1;\ 1)$

і $(x;\ y;\ z)$. **3.48.** 5, −5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів (3; 4) і $(x;\ y)$. **3.49.** 1. **3.51.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a^2;\ b^2;\ c^2)$ і $\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c}\right)$. **3.54.** *Вказівка.* $(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd = (ad + bc) + (cd + ba)$. **3.55.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\sqrt{3a+1};\ \sqrt{3b+1};\ \sqrt{3c+1}\right)$ і (1; 1; 1). **3.57.** 5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(2;\ x)$ і $\left(\sqrt{x-1};\ 5\right)$. Далі скористайтеся умовою досягнення рівності в нерівності Коші—Буняковського. **3.58.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(x;\ y;\ z)$ і $(3;\ -1;\ 1)$. **3.59.** *Вказівка.* $|2x + y - z| \leqslant \sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2} \times \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}$. **3.60.** *Вказівка.* I спосіб. $\sqrt{b-1} = \sqrt{(b-1)\cdot 1} \leqslant \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$. II спосіб. $\frac{a}{\sqrt{b-1}} + \frac{b}{\sqrt{a-1}} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a-1}} \cdot \frac{b}{\sqrt{b-1}}} \geqslant 4$. **3.61.** *Вказівка.* Маємо: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Також, порівнюючи середнє квадратичне і середнє арифметичне чисел $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$, можна записати $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. **3.62.** *Вказівка.* $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{\left(a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{a}\right)^2}{2}$. Далі скористайтеся тим, що з умови $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$ випливає нерівність $ab \leqslant \frac{1}{4}$. **3.63.** *Вказівка.* $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geqslant \sqrt{2} \cdot \frac{a+1}{2}$. **3.64.** *Вказівка.* Маємо:

$$\sqrt{(1-a-b)^2 + c^2 + c^2} + \sqrt{(1-b-c)^2 + a^2 + a^2} + \sqrt{(1-c-a)^2 + b^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{(1-a-b)^2 + c^2 + c^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-b-c)^2 + a^2 + a^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-c-a)^2 + b^2 + b^2}{3}}\right).$$

Далі порівняйте середнє квадратичне трьох чисел з їх середнім арифметичним. **3.65.** *Вказівка.* Нехай сторона квадрата дорівнює 1. Скористаємось позначеннями, показаними на рисунку. Залишилося довести нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-z)^2} + \sqrt{z^2 + (1-t)^2} + \sqrt{t^2 + (1-x)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$. Далі див. приклад 1 п. 3. **3.66.** *Вказівка.* $1 + a = 2 - b - c = (1-b) + (1-c) \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$.

**3.67.** *Вказівка*. І спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{x+z}}; \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ і $\left(\sqrt{y+z}; \sqrt{x+z}; \sqrt{x+y}\right)$. ІІ спосіб. У силу нерівності Коші $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geqslant x$ і т. д. **3.68.** *Вказівка*. Оскільки при $a > 0$ і $b > 0$ $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$.

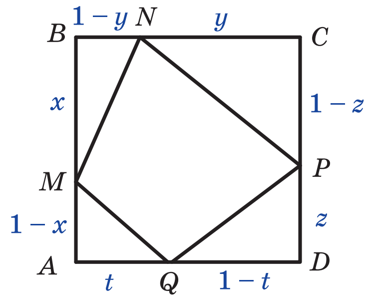



Рис. до задачі 3.65

**3.69.** *Вказівка*. $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1} \geqslant \frac{\frac{2a}{b+c}\cdot 1}{\frac{a}{b+c}+1} = \frac{2a}{a+b+c}$. **4.1.** *Вказівка*. І спосіб. Скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. ІІ спосіб. Скористайтесь нерівністю (***) п. 4. **4.3.** *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю (**) з п. 4. **4.4.** *Вказівка*. $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} = \frac{(x^2)^2}{yx} + \frac{(y^2)^2}{zy} + \frac{(z^2)^2}{xz}$. **4.5.** *Вказівка*. І спосіб. Скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. ІІ спосіб. $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} = \frac{1}{9}\left(\frac{(3a)^2}{b+2c} + \frac{(3b)^2}{c+2a} + \frac{(3c)^2}{a+2b}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. **4.6.** *Вказівка*. І спосіб. $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{(a^2)^2}{ab+ac} + \frac{(b^2)^2}{bc+ba} + \frac{(c^2)^2}{ca+cb}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. ІІ спосіб. $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} = \frac{1}{4}\left(\frac{(2a^2)^2}{ab+ac} + \frac{(2b^2)^2}{bc+ba} + \frac{(2c^2)^2}{ca+cb}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. **4.8.** *Вказівка*. $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} = \frac{1^2}{1+ab} + \frac{1^2}{1+bc} + \frac{1^2}{1+ac}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. **4.9.** *Вказівка*. Ліву частину нерівності подайте у вигляді $\frac{x^2}{x^2+2yx+3zx} + \frac{y^2}{y^2+2zy+3xy} + \frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4 і нерівністю $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. **4.11.** *Вказівка*. Скориставшись ключовою задачею 2.17(1), можна записати, що $(x+1)(y+1) = xy+1+x+y \geqslant 2(x+y)$. **4.12.** *Вказівка*. За допомогою ключової задачі 2.17(1) і умови $x \in [0;\ 1]$ можна записати, що $\frac{x}{2+yz} = \frac{x}{1+yz+1} \leqslant \frac{x}{1+y+z} \leqslant \frac{x}{x+y+z}$. **4.14.** *Вказівка*. Скориставшись ключовою задачею 2.13, можна записати, що $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{a^2b+b^2a+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$. **4.15.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2.13. **4.16.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2.13. **4.17.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 2.19. **4.18.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2.22. **4.19.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2.25. **4.20.** *Вказівка*. Скориставшись задачею 2.29 (1), можна записати: $\frac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; ...; $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$. **4.21.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 2.29 (2). **5.10.** 2) $(-\infty;\ -7) \cup (-7;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$; 4) $[4;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$. **5.21.** 3) $\{1\} \cup [2;\ +\infty)$; 4) $\{-1\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $(-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 6) $[0;\ +\infty)$. **5.22.** 3) $(-3;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; 4) $\{-4\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $\{-5\} \cup [-2;\ +\infty)$; 6) $(0;\ +\infty)$. **5.23.** 1) $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{8}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$. **5.24.** 1) $\left[\frac{19}{20};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{12}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$. **5.25.** Див. рисунок. **5.26.** 1) $[-4;\ 1]$; 2) $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$; 3) $[-3;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-4;\ 4]$; 6) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **5.27.** 1) $[-10;\ 0]$; 2) $[-27;\ 3]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) $[0;\ 1]$; 6) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$. **5.28.** 1) $\mathbb{Q}$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 5) $\mathbb{Q}$. **5.29.** 1) $\{1\}$; 2) $\{0;\ 1\}$; 3) $\mathbb{Q}$. **5.30.** 1) $\{0;\ 1\}$; 2) $\{0\}$. **5.31.** 3) Див. рисунок. *Вказівка*. $D(y) = [-1;\ 2)$, $E(y) = \{0;\ 1\}$. **5.32.** 2) Див. рисунок. *Вказівка*. $D(y) = \mathbb{Z}$, $E(y) = \{0\}$. **5.33.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **5.34.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **5.35.** Див. рисунок. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що коли $x \in \mathbb{Z}$, то $x^2 \equiv r \pmod 5$ тільки при $r \in \{0;\ 1;\ 4\}$. **5.37.** $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. **5.38.** $g(x) = 13 - 3x$. **5.39.** $f(x) = \frac{1}{3} - x$. *Вказівка*. Оскільки рівність, задана в умові, виконується при всіх $x$, то замість $x$ підставте $-x$. Отримаємо $f(-x) + 2f(x) = -x + 1$. Із системи $\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x + 1, \\ f(-x) + 2f(x) = -x + 1 \end{cases}$ знаходимо $f(x) = \frac{1}{3} - x$. Залишилося пере-

Додаток 1

**Зміст програми з алгебри (9 клас)**
**для класів з поглибленим вивченням математики**
*Затверджено Міністерством освіти і науки України*
*(лист № 1/11-2151 від 30.05.2008 р.)*

**Структура програми**

Програма подана у формі таблиці, яка містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до підготовки учнів.

У частині «Зміст навчального матеріалу», яка оформлена прямим шрифтом, включено зміст програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Текст, оформлений курсивом, містить навчальний матеріал, який вивчається у класах з поглибленим рівнем математики.

Програма передбачає можливість вивчення змісту курсу з різним степенем повноти. Додаткові питання і теми, узяті в квадратні дужки, можна не вивчати, що дозволяє вчителеві залежно від конкретних умов варіювати об'єм матеріалу, який вивчається, і відповідно ступінь поглиблення і розширення курсу.

**9-й клас. Алгебра**
**(175 год. І семестр — 80 год, 5 год на тиждень,**
**ІІ семестр — 95 год, 5 год на тиждень)**

| К-ть год. | Зміст навчального матеріалу | Державні вимоги до рівня підготовки учнів |
|---|---|---|
| 10 | **Тема 1. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ 8 КЛАСУ** | |
| 15 | **Тема 2. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ** | |
| | Основні методи доведення нерівностей. *Нерівність Коші для двох чисел та її застосування. Нерівності між середніми величинами двох додатних чисел (середнє гармонічне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне).* [*Нерівність Коші-Буняковського.*] *Метод використання відомих нерівностей.* | **Описує** основні методи доведення нерівностей: використання означення нерівності, доведення від супротивного, використання відомої нерівності.<br>**Доводить** нерівність Коші для двох невід'ємних чисел, нерівність для суми двох додатних взаємно обернених чисел.<br>**Розв'язує** вправи, у яких передбачено використання основних методів доведення нерівностей. |

| К-ть год. | Зміст навчального матеріалу | Державні вимоги до рівня підготовки учнів |
|---|---|---|
| | **Тема 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ** | |
| 45 | Функції. Властивості функцій: парність і непарність, зростання і спадання, нулі і проміжки знакосталості, *найбільше і найменше значення функції*. [*Використання властивостей функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей*.]<br>Перетворення графіків функцій: $f(x) \to f(x) + b$, $f(x) \to$ $\to f(x + a)$, $f(x) \to kf(x)$, $\to$ $f(x) \to f(kx)$, $f(x) \to f(-x)$, $\to$ $\to f(x) \to \lvert f(x) \rvert$, $f(x) \to f(\lvert x \rvert)$.<br>[*Функції* $y = [x]$ *і* $y = \{x\}$ *та їх графіки*.]<br>Квадратична функція, її графік і властивості.<br>Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною. *Метод інтервалів. Задачі на дослідження властивостей квадратного тричлена з параметрами. Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами.* | **Формулює** означення: функції, парної та непарної функцій, зростаючої та спадної функцій, нуля функції, проміжку зростання і проміжку спадання функції, проміжку знакосталості функції, найбільшого і найменшого значень функції.<br>**Описує** алгоритми: побудови графіка квадратичної функції, перетворення графіків функцій ($f(x) \to f(x) + b$, $f(x) \to f(x + a)$, $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to$ $\to f(kx)$, $f(x) \to f(-x)$, $f(x) \to$ $\to \lvert f(x) \rvert$, $f(x) \to f(\lvert x \rvert)$).<br>**Розв'язує** вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції, побудову графіків функцій з використанням зазначених вище перетворень, розв'язування нерівностей методом інтервалів. |
| | **Тема 4. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ** | |
| 33 | Рівняння з двома змінними. *Графік рівняння з двома змінними. Рівносильні системи рівнянь.*<br>*Система — наслідок даної. Методи розв'язування систем рівнянь.*<br>*Нерівність з двома змінними. Графік нерівності з двома змінними. Системи нерівностей з двома змінними. Геометрична інтерпретація розв'язків системи нерівностей з двома змінними.*<br>Розв'язування текстових задач за допомогою систем рівнянь *і нерівностей*. | **Формулює** означення: розв'язку рівняння (нерівності) з двома змінними, графіка рівняння (нерівності) з двома змінними, рівносильних систем рівнянь (нерівностей) з двома змінними.<br>**Описує** графічний метод розв'язування систем рівнянь з двома змінними.<br>**Розв'язує** вправи, що передбачають розв'язання систем двох рівнянь з двома змінними методами підстановки, додавання, заміни змінних, побудову графіків рівнянь і нерівностей з двома змінними, складання і розв'язання систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей реальних ситуацій. |

| К-ть год. | Зміст навчального матеріалу | Державні вимоги до рівня підготовки учнів |
|---|---|---|
| 25 | **Тема 5. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ** | |
| | Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. *Комбінаторні правила додавання і множення. Основні формули комбінаторики. Розміщення, сполучення (комбінації), перестановки.* Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. *Статистичне і класичне означення ймовірності. Обчислення ймовірностей за допомогою формул комбінаторики.* Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Вибірка. Середні значення. | **Наводить приклади** математичних моделей реальних ситуацій, випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків. **Описує** поняття: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань. **Формулює** комбінаторні правила додавання і множення; означення понять: перестановка, сполучення (комбінації), розміщення, ймовірність випадкової події. **Розв'язує** вправи, що передбачають використання формули обчислення складних відсотків, формул для обчислення перестановок, сполучень і розміщень, знаходження ймовірності випадкової події, знаходження частоти, моди і медіани статистичної вибірки. |
| 32 | **Тема 6. ПОСЛІДОВНОСТІ** | |
| | Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей. Формула $n$-го члена. *Рекурентний спосіб задання послідовностей.* Арифметична і геометрична прогресії та їх властивості. Формули $n$-го члена і суми $n$ перших членів прогресій. Нескінченна геометрична прогресія. *Уявлення про границю послідовності.* [*Сумування послідовностей.*] *Метод математичної індукції та його застосування.* | **Описує** способи задання числових послідовностей, метод математичної індукції. **Формулює** означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій. **Доводить** властивості арифметичної та геометричної прогресій, формули $n$-го члена і суми $n$ перших членів арифметичної та геометричної прогресій. **Має уявлення** про суму членів нескінченної геометричної прогресії ($\lvert q \rvert <1$) як про границю послідовності. **Розв'язує** вправи, що передбачають знаходження членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших $n$ членів арифметичної та геометричної прогресій; запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного; використання формул $n$-го члена і суми $n$ перших членів прогресій для знахо дження невідомих елементів прогресій; використання метода математичної індукції. |
| 15 | **Тема 7. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ** | |

Додаток 2

**Орієнтовне календарне планування з алгебри (9 клас) для класів з поглибленим вивченням математики**

| № | Зміст навчального матеріалу | Кількість годин |
|---|---|---|
| **Тема 1. Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу алгебри 8 класу (10 год)** | | |
| 1 | Повторення й систематизація навчального матеріалу | 9 |
| 2 | Контрольна робота № 1 | 1 |
| **Тема 2. Доведення нерівностей (15 год)** | | |
| 3 | Основні методи доведення нерівностей | 7 |
| 4 | Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші-Буняковського | 7 |
| 5 | Контрольна робота № 2 | 1 |
| **Тема 3. Квадратична функція (45 год)** | | |
| 6 | Функція | 3 |
| 7 | Зростання і спадання функцій. Найбільше і найменше значення функції | 4 |
| 8 | Парні і непарні функції | 4 |
| 9 | Контрольна робота № 3 | 1 |
| 10 | Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$ | 3 |
| 11 | Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$ | 3 |
| 12 | Як побудувати графіки функцій $y = f(\lvert x \rvert)$ і $y = \lvert f(x) \rvert$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$ | 4 |
| 13 | Квадратична функція, її графік і властивості | 5 |
| 14 | Контрольна робота № 4 | 1 |
| 15 | Розв'язування квадратних нерівностей | 6 |
| 16 | Метод інтервалів. Розв'язування раціональних нерівностей | 5 |
| 17 | Розміщення нулів квадратичної функції відносно заданої точки | 5 |
| 18 | Контрольна робота № 5 | 1 |

| № | Зміст навчального матеріалу | Кількість годин |
|---|---|---|
| **Тема 4. Системи рівнянь і нерівностей з двома змінними (33 год)** | | |
| 19 | Рівняння з двома змінними та його графік | 4 |
| 20 | Графічні методи розв'язування систем рівнянь із двома змінними | 4 |
| 21 | Розв'язування систем рівнянь з двома змінними методом підстановки і методами додавання та множення | 4 |
| 22 | Метод заміни змінних та інші способи розв'язування систем рівнянь з двома змінними | 5 |
| 23 | Контрольна робота № 6 | 1 |
| 24 | Нерівності з двома змінними | 4 |
| 25 | Системи нерівностей з двома змінними | 5 |
| 26 | Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь і систем нерівностей | 5 |
| 27 | Контрольна робота № 7 | 1 |
| **Тема 5. Елементи прикладної математики (25 год)** | | |
| 28 | Математичне моделювання | 2 |
| 29 | Відсоткові розрахунки | 3 |
| 30 | Метод математичної індукції | 3 |
| 31 | Контрольна робота № 8 | 1 |
| 32 | Основні правила комбінаторики. Перестановки | 3 |
| 33 | Розміщення | 2 |
| 34 | Сполуки (комбінації) | 2 |
| 35 | Частота та ймовірність випадкової події | 2 |
| 36 | Класичне означення ймовірності | 2 |
| 37 | Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики | 2 |
| 38 | Початкові відомості про статистику | 2 |
| 39 | Контрольна робота № 9 | 1 |
| **Тема 6. Числові послідовності (32 год)** | | |
| 40 | Числові послідовності | 3 |
| 41 | Арифметична прогресія | 4 |
| 42 | Сума $n$ перших членів арифметичної прогресії | 5 |

| № | Зміст навчального матеріалу | Кількість годин |
|---|---|---|
| 43 | Контрольна робота № 10 | 1 |
| 44 | Геометрична прогресія | 5 |
| 45 | Сума $n$ перших членів геометричної прогресії | 4 |
| 46 | Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, у якої $\lvert q \rvert < 1$ | 5 |
| 47 | Підсумовування | 4 |
| 48 | Контрольна робота № 11 | 1 |
| **Тема 7. Повторення і систематизація навчального матеріалу (15 год)** | | |
| 49 | Повторення навчального матеріалу | 14 |
| 50 | Контрольна робота № 12 | 1 |

# Зміст

## § 4. Системи рівнянь і нерівностей з двома змінними



## § 5. Елементи прикладної математики

## § 6. Числові послідовності

*Навчальне видання*

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

# АЛГЕБРА

*Підручник для 9 класу*
*з поглибленим вивченням математики*

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 21.07.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 24,00.
Тираж 5000 прим. Замовлення № 368.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 758-83-93, 719-17-26, факс: (057) 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
Тел. (057) 758-15-80

**Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.**

М52 Алгебра: Підручн. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2009. — 384 с.: іл.

ISBN 978-966-474-059-0.

**УДК 373:512**
**ББК 22.141.я721**